

Rappels:

§6.3 Existence, continuité et dérivabilité de la fonction

réciproque

Proposition 6.15 $\rightarrow \forall f \in C^0(I), \quad f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ strictement monotone}$

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors, f est injective si et seulement si elle est strictement monotone

Théorème 6.16 $\rightarrow \forall f \in C^0(I), \text{ bijective, } f^{-1} \in C^0(f(I)).$

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $f: I \rightarrow \text{Im}(f)$ une fonction continue et bijective. Alors, $f^{-1}: \text{Im}(f) \rightarrow I$ est continue

Théorème 6.17 :

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $x_0 \in I$ et $f: I \rightarrow \text{Im}(f)$ une fonction continue, bijective et dérivable en x_0 . Si $f'(x_0) \neq 0$, $f^{-1}: \text{Im}(f) \rightarrow I$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Remarque 6.18

Si f et f^{-1} sont toutes deux dérivables, on peut retrouver cette formule en utilisant la proposition 6.4 :

$$f^{-1}(f(x)) = x$$

$$\Downarrow \frac{d}{dx}$$

$$(f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

$$\begin{array}{c} y = f(x) \\ \longleftarrow \\ x = f^{-1}(y) \end{array}$$

$$f(f^{-1}(y)) = y$$

$$\Downarrow \frac{d}{dy}$$

$$f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Théorème 6.19:

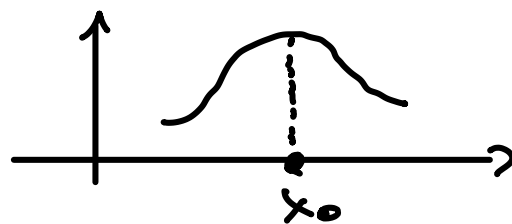
Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, $f: I \rightarrow \text{Im}(f)$ une fonction dérivable tq
 $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$. Alors, f est bijective f^{-1} est dérivable
et $\forall y \in \text{Im}(f)$ $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$

§ 6.4 Les théorèmes de Rolle, des accroissements finis
& la règle de Bernoulli - L'Hôpital

Proposition 6.20:

Soit $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$, et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ tq f est définie au voisinage
de x_0 , dérivable en x_0 et tq f prend son min ou son
max en x_0 .

Alors, $f'(x_0) = 0$



Preuve (cas du maximum)

On a $\forall x \in D, f(x) \leq f(x_0)$.

Remarquons que

$$f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Pour finir $0 \leq f'_g(x_0) = f'(x_0) = f'_d(x_0) \leq 0$

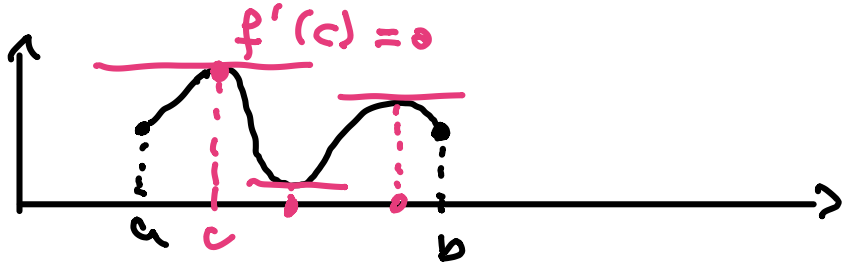
$$\Rightarrow f'(x_0) = 0.$$

f dérivable en x_0

Théorème 6.2 (thm de Rolle)

Soit $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, b[$ et

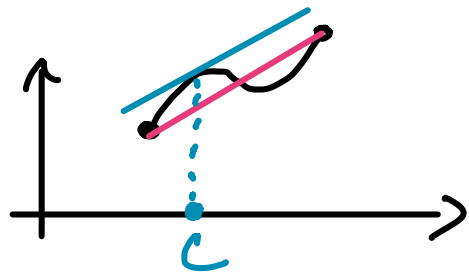
tg $f(a) = f(b)$. Alors, $\exists c \in]a, b[$ tq $f'(c) = 0$.



Théorème 6.22 (théorème des accroissements finis (TAF))

Soit $a < b$, $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et dérivable sur $]a, b[$

Alors, $\exists c \in]a, b[$ tq $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$



pente de
la tangente
en c.

pente du segment rose

Preuve :

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right)$$

$mx + h$

$$\begin{cases} m \cdot a + h = f(a) \\ m \cdot b + h = f(b) \end{cases}$$

Alors,

$$g(a) = \cancel{f(a)} - \cancel{f(a)}^0 - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (\cancel{a} - \cancel{a})^0 = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} (b - a) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0$$

De plus, par les propriétés algébriques, g est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Donc, par le théorème de Rolle appliqué à g , soit $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.

$$\text{Or, } g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}. \text{ Et donc}$$

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$



Remarque 6.23

si on veut utiliser le TAF pour a, b , $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
et ce ne suit pas si $a < b$ ou $b < a$.

1) si $a < b$, $\exists c \in]a, b[$ ou si $b < a$ $\exists c \in]b, a[$. tq ...

2) $\exists c \in]\min\{a, b\}, \max\{a, b\}[$. tq ...

À la place :

$$\exists \theta \in]0, 1[\text{ tq } f'(a + \theta(b-a)) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

$$\theta = \frac{c-a}{b-a} \quad \longleftrightarrow \quad c = a + \theta(b-a)$$

Théorème 6.24 (Théorème des accroissements finis généralisé)

Soit $a < b$, $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ tq $g(b) \neq g(a)$ & $\forall x \in]a, b[, g'(x) \neq 0$.

Alors, $\exists c \in]a, b[\cap]t, q[$

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

(TAF, $g(x) = x$)

Théorème 6.25 (Règle de Bernoulli - L'Hospital.)

Soient $a < x_0 < b$, $f, g :]a, b[\setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables et $\alpha \in \{0, -\infty, +\infty\}$.

Supposons que $\forall x \in]a, b[\setminus \{x_0\}$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ et

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \alpha$$

(i) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$ existe, alors,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Laidlaw

→ info session 10 sept.

(ii) Si $\alpha = 0$, $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables, et $g'(x_0) \neq 0$,
 alors,
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Remarque 6.26 :

- (i) Le résultat est également vrai pour des limites latérales ou des limites à $+\infty$ ou $-\infty$.
- (ii) Δ il existe des fonctions pour lesquelles $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe,
 mais $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ n'existe pas. exemple 6.14 pour f , $g(x) = x$,
 $x_0 = 0$

Exemples 6.27 :

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \stackrel{\text{B.4}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} \stackrel{\text{B.4}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{14} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{14}}{\frac{1}{e^{-x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{14}}{e^x}$$

$$\text{B.H.} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{14 \cdot x^{13}}{e^x} \quad \text{B.H.} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{14 \cdot 13 \cdot x^{12}}{e^x} = \dots$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{14! \cdot x}{e^x} \quad \text{B.H.} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{14!}{e^x} = 0$$

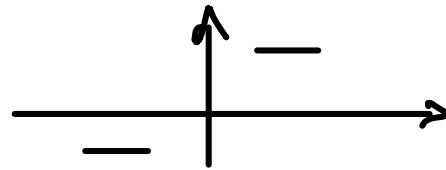
§ 6.5 Applications du théorème des accroissements finis à l'étude de fonctions

Proposition 6.28 :

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, tq $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$. Alors, f est constante.

Exemple 6.29

Soit $f:]-2, -1[\cup]1, 2[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \in]-2, -1[\\ 1 & \text{si } x \in]1, 2[\end{cases}$



Où $f'(x) = 0$, mais la constante à laquelle f est égale peut changer en fonction de l'intervalle dans lequel x se trouve.

Proposition 6.30 :

Soit I un intervalle ouvert et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Alors,

(i) f est croissante $\Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) \geq 0$.

(ii) si $\forall x \in I, f'(x) > 0$, f est strictement croissante

(iii) f est décroissante $\Leftrightarrow \forall x \in I, f'(x) \leq 0$

(iv) si $\forall x \in I, f'(x) < 0$, f est strictement décroissante.

Exemple 6.31

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3$.

Alors, f est strictement croissante. Mais $f'(x) = 3x^2$ qui s'annule en 0 (et donc, on n'a pas $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0$)

Chapitre 7: L'étude de fonctions

§ 7.1 Extrema & détermination de l'ensemble image.

Définition 7.1: (extremum, minimum, maximum)

Soient $x_0 \in D$ et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que

(i) f admet un minimum local en x_0 si

$$\exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in D \text{ tq } |x - x_0| < \delta, \quad f(x) \geq f(x_0)$$

(ii) f admet un maximum local en x_0 si

$$\exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in D \text{ tq } |x - x_0| < \delta, \quad f(x) \leq f(x_0)$$

(iii) f admet un extrémum local en x_0 si f admet un min ou un max local en x_0 .

(iv) f admet un minimum (global) en x_0 si
 $\forall x \in D, f(x) \geq f(x_0)$ f prend son min en x_0 .

(v) f admet un maximum (global) en x_0 si
 $\forall x \in D, f(x) \leq f(x_0)$

(vi) f admet un extremum (global) en x_0 si f
admet son min ou son max global en x_0 .